

管理科学专题讲义

线性规划导论：RMC 公司案例

Dr. L. Zhang

2026 年 10 月 25 日

1 案例背景介绍

我们通过 RMC 公司的一个具体混合配料问题，逐步展开线性规划的核心内容：模型构建、图解法求解、代数标准型与矩阵表示。

1.1 案例描述：RMC 公司

RMC 公司是一家化工生产企业，通过混合三种原材料（原料 I、原料 II 和原料 III）生产两种商业产品：**燃料添加剂**和**溶剂基料**。

每单位产出需要按固定配比投入原材料：

- 生产 1 单位燃料添加剂需要 1 吨原料 I、2 吨原料 II 和 1 吨原料 III。
- 生产 1 单位溶剂基料需要 0 吨原料 I、3 吨原料 II 和 1 吨原料 III。

扣除直接变动成本后，两种产品的单位利润贡献分别为：

- 每生产 1 单位燃料添加剂贡献利润 \$5，
- 每生产 1 单位溶剂基料贡献利润 \$7。

在即将到来的计划期内，RMC 公司的原材料库存上限固定如下：

- 原料 I：6 吨，
- 原料 II：19 吨，
- 原料 III：8 吨。

管理层希望确定燃料添加剂和溶剂基料的生产数量，在不超出任何一种原材料可用供应量的前提下，使总利润贡献达到最大。

2 第一步：问题构建

在写出数学方程之前，我们先将实际运营问题梳理为四个基本要素：决策、数据、目标与约束。

1. 识别决策变量：管理层可以直接控制哪些数量？

- 燃料添加剂的生产数量，记为 F 。
- 溶剂基料的生产数量，记为 S 。

2. 汇总输入数据：将投入产出系数、单位利润与资源可用量整理到同一张表中，能够清晰呈现各项决策之间的关联。

表 1: RMC 公司的投入产出需求、资源可用量与单位利润。

原材料	燃料添加剂 (F)	溶剂基料 (S)	可用容量 (吨)
原料 I	1	0	6
原料 II	2	3	19
原料 III	1	1	8
单位利润	\$5	\$7	—

3. 明确目标：最大化计划期内获得的总利润贡献。

4. 列出约束条件：

- 原料 I 的总消耗量不能超过可用的 6 吨。
- 原料 II 的总消耗量不能超过可用的 19 吨。
- 原料 III 的总消耗量不能超过可用的 8 吨。
- 产品的生产数量不能为负数。

3 第二步：数学建模（模型转译）

下面我们将表 1 中的文字表述转化为代数模型。定义两个决策变量如下：

- F ：生产的燃料添加剂单位数，
- S ：生产的溶剂基料单位数。

每单位燃料添加剂贡献 \$5，每单位溶剂基料贡献 \$7，因此度量总利润 Z （单位：美元）的目标函数给出如下优化目标：

$$\text{Maximize } Z = 5F + 7S.$$

按行读取表 1，每种原材料对应一条线性不等式，限制其总消耗量不超过可用供应量：

$$\begin{aligned} \text{Subject to (s.t.): } F &\leq 6 && \text{(原料 I) ,} \\ 2F + 3S &\leq 19 && \text{(原料 II) ,} \\ F + S &\leq 8 && \text{(原料 III) .} \end{aligned}$$

由于负的产量没有实际物理意义，模型还需包含**非负约束**：

$$F \geq 0, \quad S \geq 0 \quad \text{(非负性) .}$$

4 第三步：图解法求解

由于 RMC 模型只包含两个决策变量，我们可以在 (F, S) 平面内以 F 为横轴、 S 为纵轴，用几何方法求解该问题。

1. **绘制约束边界线**：每一条线性不等式都在平面上确定一个以直线为边界的半平面：
 - 原料 I 边界线： $F = 6$,
 - 原料 II 边界线： $2F + 3S = 19$,
 - 原料 III 边界线： $F + S = 8$ 。
2. **确定可行域**：**可行域**是同时满足上述三条资源不等式以及非负条件 $F \geq 0$ 、 $S \geq 0$ 的所有点 (F, S) 的集合（即图 1 中的阴影区域）。
3. **寻找最优解**：对于任意给定的利润水平 Z ，方程 $5F + 7S = Z$ 定义了一条斜率为 $-5/7$ 的直线，称为**等利润线**；直线上每一个生产方案都产生相同的利润 Z 。将等利润线沿利润增加的方向（即右上方）向外平移， Z 的值随之增大，直到直线到达它与可行域的最后一个接触点；该接触点落在可行域的某个角点（顶点）上。

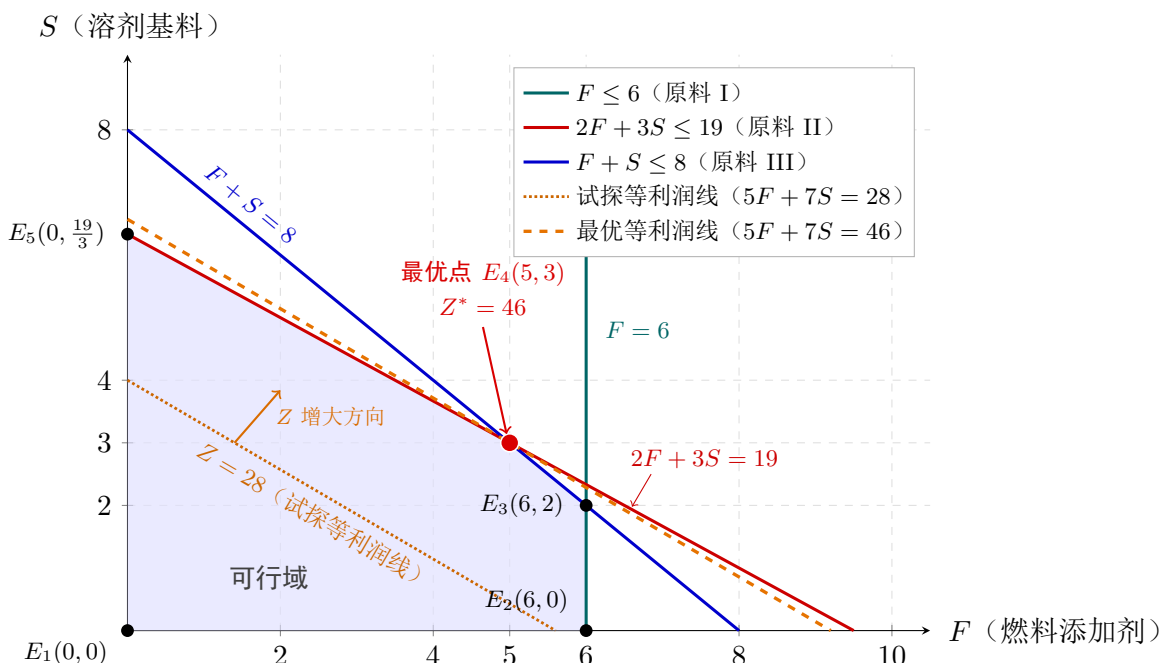


图 1: RMC 公司问题的可行域、角点 E_1 – E_5 与等利润线。

如图 1 所示，向外平移的等利润线在角点 $E_4 = (5, 3)$ 处取得最大利润，该点正是原料 II 与原料 III 边界线的交点：

$$\begin{cases} 2F + 3S = 19 \\ F + S = 8 \end{cases} \implies (F^*, S^*) = (5, 3), \quad Z^* = 5(5) + 7(3) = \$46.$$

5 第四步：管理报告（结果还原）

为了完成整个建模闭环，我们将数学最优解 $(F^*, S^*) = (5, 3)$ 还原为面向 RMC 管理层的生产计划与资源核查结果：

1. **最优生产计划：**生产 $F^* = 5$ 单位燃料添加剂和 $S^* = 3$ 单位溶剂基料。
2. **最大利润贡献：**该生产计划可带来 $Z^* = 5(5) + 7(3) = \$46$ 的总利润贡献。
3. **资源利用情况核查：**将 $(F^*, S^*) = (5, 3)$ 代入三条原材料约束，可以识别出限制生产的瓶颈资源：
 - **原料 I：**实际消耗量为 $1(5) + 0(3) = 5$ 吨，可用容量为 6 吨，剩余 1 吨未用容量。
 - **原料 II：**实际消耗量为 $2(5) + 3(3) = 19$ 吨，可用容量为 19 吨；可用供应量全部耗尽。
 - **原料 III：**实际消耗量为 $1(5) + 1(3) = 8$ 吨，可用容量为 8 吨；可用供应量全部耗尽。

6 扩展专题

在基本四步建模流程之外，线性规划的若干结构性质决定了为什么角点搜索有效，以及高维模型如何通过代数方法求解。

6.1 极点与线性规划基本定理

为什么图 1 中向外平移的等利润线与可行域的最后一个接触点会落在多边形的角点上？

由于每一条线性不等式定义一个闭半平面，它们的交集构成的可行域是一个凸多边形（在更高维空间中则是凸多面体）。在凸集中，如果一个点不能表示为集合内另外两个不同点的严格凸组合（即不严格位于集合内任意两点之间），则称该点为极点（又称顶点或角点可行解）；在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 的几何图形中，极点出现在两条约束边界线相交且其余所有约束均得到满足的位置。由于目标函数 $Z = 5F + 7S$ 是线性的，它不可能在可行域内部或某条边的中点处取得严格局部最大值，除非它在该边的端点处也同时取得同一最大值。这一几何原理即为线性规划基本定理：

若线性规划具有非空有界的可行域（更一般地，若线性规划在标准多面体上存在有限最优值），则至少存在一个最优解出现在可行域的极点上。

该定理将连续可行方案上的无穷搜索简化为对有限个极点的逐一检验。如图 1 所示，RMC 可行多边形共有五个极点 E_1 至 E_5 。表 2 计算了每个极点处的利润 $Z = 5F + 7S$ ，验证了 $E_4(5, 3)$ 取得最高利润。

表 2: RMC 公司可行域极点的枚举与利润比较。

顶点	坐标 (F, S)	相交的边界方程	利润 $Z = 5F + 7S$
E_1	$(0, 0)$	$F = 0$ 与 $S = 0$	$5(0) + 7(0) = \$0$
E_2	$(6, 0)$	$F = 6$ 与 $S = 0$	$5(6) + 7(0) = \$30$
E_3	$(6, 2)$	$F = 6$ 与 $F + S = 8$	$5(6) + 7(2) = \$44$
E_4	$(5, 3)$	$2F + 3S = 19$ 与 $F + S = 8$	$5(5) + 7(3) = \$46$ （最优）
E_5	$(0, \frac{19}{3})$	$F = 0$ 与 $2F + 3S = 19$	$5(0) + 7(\frac{19}{3}) = \$44.33$

需要注意的是，并非任意两条边界线的交点都能构成可行的极点。例如，原料 I 边界线 ($F = 6$) 与原料 II 边界线 ($2F + 3S = 19$) 相交于点 $(F, S) = (6, \frac{7}{3})$ ，但将该点代入原料 III 约束可得 $6 + \frac{7}{3} = \frac{25}{3} > 8$ 。由于 $(6, \frac{7}{3})$ 超出了原料 III 的可用容量，它落在可行多边形外部，属于不可行交点。

6.2 线性规划的标准型

几何观察适用于二维问题，而实际工业中的线性规划往往包含成千上万个变量。为了用代数方法在极点之间搜索（例如使用 Dantzig 单纯形法），我们需要将不等式转化为统一的线性方程组形式，称为标准型。

当线性规划满足以下四个结构条件时，即处于标准型：

1. **统一的优化方向：**目标函数按统一的规范方向书写（此处统一为最大化；最小化问题 $\min c^T x$ 等价于 $-\max(-c^T x)$ ）。
2. **等式约束：**每一条结构约束均为线性等式（=），而非不等式（ $\leq$ 或 $\geq$ ）。
3. **右端项非负：**每一个右端常数均满足 $b_i \geq 0$ 。若某条方程的 $b_i < 0$ ，将方程两边同乘 -1 即可恢复 $b_i \geq 0$ 。
4. **决策变量非负：**每一个决策变量均满足 $x_j \geq 0$ 。若某个原始变量 $x_j \in \mathbb{R}$ 无符号限制（自由变量），可令 $x_j = x_j^+ - x_j^-$ 并要求 $x_j^+ \geq 0$ 、 $x_j^- \geq 0$ 。

6.3 松弛变量与剩余变量

为了在保持变量非负的前提下将不等式约束转化为等式约束，我们引入辅助变量来度量不等式左端项与右端项之间的差额：

- **松弛变量（ $\leq$ 约束）：**“小于或等于”约束 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ 通常表示资源上限。我们在不等式左端加上一个非负的松弛变量 $s_i \geq 0$ ：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

在经济含义上，松弛变量 $s_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ 度量了未使用的资源容量（如闲置库存或未用工时）。

- **剩余变量（ $\geq$ 约束）：**“大于或等于”约束 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ 通常表示最低要求，例如合同规定的最低交付配额或最低质量标准。我们在不等式左端减去一个非负的剩余变量 $e_i \geq 0$ ：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - e_i = b_i, \quad e_i \geq 0.$$

在经济含义上，剩余变量 $e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i$ 度量了超出规定阈值 b_i 的超额产量或超额完成量。例如，若 RMC 公司签署了一份供货合同，要求两种产品的合计产量至少达到 6 单位（ $F + S \geq 6$ ），则可写为 $F + S - e_4 = 6$ 且 $e_4 \geq 0$ 。在最优生产方案 $(F^*, S^*) = (5, 3)$ 下，剩余变量为 $e_4^* = 5 + 3 - 6 = 2$ ，表示比最低配额多生产 2 单位。

- **松弛变量与剩余变量的目标函数系数：**无论是现有库存中未动用的原材料，还是超出最低要求的部分，都不会直接带来额外的销售收入，因此松弛变量和剩余变量在目标函数中的系数均为 0。

6.4 RMC 模型的标准型与基可行解

分别为原料 I、原料 II 和原料 III 引入松弛变量 $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ ，即可将 RMC 模型转化为标准型：

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Z &= 5F + 7S + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\ \text{s.t. } F + s_1 &= 6, \\ 2F + 3S + s_2 &= 19, \\ F + S + s_3 &= 8, \\ F, S, s_1, s_2, s_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

该线性方程组包含 $m = 3$ 个方程和 $n = 5$ 个非负变量 (F, S, s_1, s_2, s_3) 。在线性代数中，将其中 $n - m = 2$ 个变量（称为**非基变量**）取为零，并求解由其余 $m = 3$ 个变量（称为**基变量**）组成的 3×3 方程组，所得的解称为**基解**。当三个基变量均非负时，该解即为**基可行解**（**basic feasible solution, BFS**）。

代数与几何之间存在一一对应关系：标准型方程组的每一个基可行解，都对应可行域的一个极点。将某个变量置为零，在几何上就是将解放在对应的约束边界线上：

- 令 $F = 0$ 且 $S = 0$ ，可得 $(s_1, s_2, s_3) = (6, 19, 8) \geq 0$ ，对应原点处的极点 $E_1(0, 0)$ 。
- 令 $s_2 = 0$ （原料 II 边界）且 $s_3 = 0$ （原料 III 边界），即要求 $2F + 3S = 19$ 且 $F + S = 8$ ，由此解得最优极点 $E_4(5, 3)$ 及如下松弛变量取值：

$$\begin{aligned} s_1^* &= 6 - F^* = 6 - 5 = 1 \quad (\text{原料 I 剩余 1 吨未用}), \\ s_2^* &= 19 - (2F^* + 3S^*) = 19 - 19 = 0 \quad (\text{原料 II 全部耗尽}), \\ s_3^* &= 8 - (F^* + S^*) = 8 - 8 = 0 \quad (\text{原料 III 全部耗尽}). \end{aligned}$$

6.5 紧约束、非紧约束与冗余约束

根据最优解处松弛变量与剩余变量的取值，可以将约束条件划分为三类：

- **紧约束（起作用约束）**：在最优解处取等号的约束（即 $s_i^* = 0$ 或 $e_i^* = 0$ ）。在 RMC 问题中，原料 II 和原料 III 约束在 $(5, 3)$ 处均为紧约束。在几何上，紧约束相交形成最优极点，并阻挡解沿利润增加的方向继续移动。在经济含义上，紧约束对应瓶颈资源：每增加 1 吨原料 II 或原料 III，都会将相应边界线向外推移并提高最大利润（因此这类资源具有正的影子价格）。
- **非紧约束（不起作用约束）**：在最优解处取严格不等号的约束（即 $s_i^* > 0$ 或 $e_i^* > 0$ ）。在 RMC 问题中，由于 $s_1^* = 1 > 0$ ，原料 I 约束 $(F \leq 6)$ 在 $(5, 3)$ 处是非紧约束。删去一条非紧约束不会改变当前的最优解 $(5, 3)$ ，但该约束依然切除了可行域的一部分；具体而言，若去掉 $F \leq 6$ ，可行多边形将向右延伸至 $(8, 0)$ ，而不会沿线段 $E_2(6, 0)$ 至 $E_3(6, 2)$ 被截断。

- **冗余约束：**删去后整个可行域保持不变的约束，因为该约束已由其余约束逻辑蕴含。例如，若在 RMC 模型中额外加入约束 $F \leq 9$ ，该约束就是冗余约束：由于 $F + S \leq 8$ 与 $S \geq 0$ 已经保证所有可行点都满足 $F \leq 8$ ，条件 $F \leq 9$ 不会接触或削减可行多边形的任何部分。因此，需要严格区分非紧约束（仅在最优点处不起作用，如 $F \leq 6$ ）与冗余约束（在整片可行域上均不起作用，如 $F \leq 9$ ）。

7 一般模型构建

从 RMC 案例建立的模型结构可以直接推广到包含 n 种产品和 m 种资源的一般生产规划问题。

7.1 模型参数（外生输入）

- $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ：产品下标。
- $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ：资源（原材料）下标。
- c_j ：产品 j 的单位利润贡献。
- b_i ：资源 i 的可用容量。
- a_{ij} ：每生产 1 单位产品 j 所消耗的资源 i 的数量（称为投入产出系数或技术系数）。

7.2 决策变量

- x_j ：产品 j 的生产数量（ $j = 1, 2, \dots, n$ ）。

7.3 标量展开式与求和记号

1. 标量展开式：

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 &\text{s.t. } \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ &x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

2. 求和记号表示:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

7.4 矩阵表示

将上述标量归集为列向量与矩阵, 即可得到适用于任意维数的紧凑线性代数表达。

1. 向量与技术矩阵:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

2. 不等式典则型与等式标准型: 利用内积 $c^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ 以及按分量比较的向量不等式, 可将典则型及其对应的标准型 (引入松弛向量 $s \in \mathbb{R}^m$ 与单位矩阵 I_m) 写为:

典则型 (Canonical Form)

$$\text{Maximize } Z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b,$$

$$x \geq 0$$

标准型 (Standard Form)

$$\text{Maximize } Z = c^T x + 0^T s$$

$$\text{s.t. } Ax + I_m s = b,$$

$$x \geq 0, s \geq 0.$$

7.5 RMC 案例的矩阵形式

将一般模型具体化到包含 $n = 2$ 种产品 ($x_1 = F$, $x_2 = S$) 和 $m = 3$ 种原材料的 RMC 问题, 各向量与矩阵分别为:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (c^T = [5 \quad 7]), \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

在典则矩阵形式下，RMC 线性规划模型写为：

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Z &= \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \text{s.t. } & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

拼入松弛向量 $s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}^T$ 与 3×3 单位矩阵 I_3 ，即可得到增广的标准型约束方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$